Teoria Cuántica de Campos - Ejercicio del Capitulo 19

Prof. Javier Garcia

13 de mayo de 2019

Sea $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y defina el funcional

$$S\left[\phi(\mathbf{x})\right] = \int d^4\left(\mathbf{x}\right)\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)$$

1. Demuestre que $S\left[\phi(\mathbf{x})\right]$ es invariante ante la transformación de coordenadas,

$$\begin{aligned}
x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\
x^{1'} &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\
x^{2'} &= x^2 \\
x^{3'} &= x^3
\end{aligned}$$

en donde $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (i.e., un "Lorentz x-boost").

Solución: Basta con demostrar como las derivadas transforman la densidad lagrangiana $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)$. El segundo término $-m^2\phi^2$ es escalar, por tanto es automáticamente invariante. En una lección anterior, el Profesor García explicó como transforman las derivadas. Para cualquier función ϕ derivable:

$$\begin{aligned}
\partial_0\phi &= \gamma\left(\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}\right)\phi \\
\partial_1\phi &= \gamma\left(-\beta\partial_{0'} + \partial_{1'}\right)\phi \\
\partial_2\phi &= \partial_{2'}\phi \\
\partial_3\phi &= \partial_{3'}\phi
\end{aligned}$$

Entonces, expandiendo el primer término $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ y sustituyendo las derivadas, y tomando en cuenta el efecto de bajar los índices (contracción con el tensor métrico $(+,-,-,-)$),

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi &= \partial_0\phi\partial^0\phi + \partial_1\phi\partial^1\phi + \partial_2\phi\partial^2\phi + \partial_3\phi\partial^3\phi \\
&= \partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi \\
&= (\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2 \\
&= (\gamma\left(\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}\right)\phi)^2 - (\gamma\left(-\beta\partial_{0'} + \partial_{1'}\right)\phi)^2 - (\partial_{2'}\phi)^2 - (\partial_{3'}\phi)^2 \\
&= \gamma^2\left(\partial_{0'}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'} + \beta^2\partial_{1'}^2\right)\phi^2 - \left(\gamma^2\left(\beta^2\partial_{0'}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'} + \partial_{1'}^2\right)\phi^2\right) - \left(\partial_{2'}^2\right)^2 - \left(\partial_{3'}^2\right)^2 \\
&= \gamma^2\left((1-\beta^2)\partial_{0'}^2 + (\beta^2-1)\partial_{1'}^2\right)\phi^2 - (\partial_{2'}\phi)^2 - (\partial_{3'}\phi)^2 \\
&= \gamma^2(1-\beta^2)\left(\partial_{0'}^2 - \partial_{1'}^2\right)\phi^2 - (\partial_{2'}\phi)^2 - (\partial_{3'}\phi)^2 \\
&= (\partial_{0'}\phi)^2 - (\partial_{1'}\phi)^2 - (\partial_{2'}\phi)^2 - (\partial_{3'}\phi)^2
\end{aligned}
$$

y como $m^2\phi(\mathbf{x}') = m^2\phi(\mathbf{x})$ podemos concluir que $\mathscr{L}$' $= \mathscr{L}$.

2. Calcule la derivada funcional (o variacional) $\frac{\delta S}{\delta\phi}$.

Solución: Vimos en este capítulo que

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)$$

osea,

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)\right)\right)$$

que se simplifica a

$$\frac{1}{2}(0 - 2m^2\phi) - \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi - 0\right) = -m^2\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi$$